ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2015

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ – ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν

- η f είναι συνεχής στο [α, β]
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(\alpha, \beta)$, τέτοιος ώστε $f(x_0)=\boldsymbol{\eta}$.

Μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0;

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0\in A$ τοπικό ελάχιστο;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι συναρτήσεις fog και gof, τότε ισχύει πάντοτε ότι fog=gof.

β) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών α+βi και γ+δi είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

γ) Για κάθε $x\in R$ ισχύει ότι $(\sigma\upsilon\nu x)'=\eta\mu x$.

δ) Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν ισχύει ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$.

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$|z-4|=2|z-1|.$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων αυτών των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ=2.

Μονάδες 7

Β2. Έστω $w=\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}$, όπου z_1, z_2 δύο μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος Β1.

Να αποδείξετε ότι:

α) ο w είναι πραγματικός και

(μονάδες 4)

β) $-4\le w\le 4$.

(μονάδες 7)

Μονάδες 11

Β3. Αν w= -4, όπου w είναι ο μιγαδικός αριθμός του ερωτήματος Β2, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους μιγαδικούς αριθούς z_1, z_2 και να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τις εικόνες $A(z_1)$, $B(z_2)$, $\Gamma(z_3)$ των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 και z_3, με $z_3=2iz_1$, είναι ισοσκελές.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}$, $x\in R$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)\right)=\frac{e^2}{5}$ έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μία ακριβώς ρίζα.

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι $\int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2xf(4x)$ για κάθε x>0.

Μονάδες 4

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\int_{2x}^{4x} f(t)dt, & x>0\\ 2, & x=0\end{cases}$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο [0, +∞).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f:R→R για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)\left[e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right]=2$ για κάθε $x\in R$ και
- f(0)=0.

Δ1. Να αποδείξετε ότι

$$f(x)=\ell n\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\ x\in R.$$

Μονάδες 5

Δ2. α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

(μονάδες 3)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την ευθεία y=x και τις ευθείες x=0 και x=1.

(μονάδες 4)

Μονάδες 7

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\ell n\left|f(x)\right|\right].$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{1-3\int_0^{x-2} f\left(t^2\right)dt}{x-3}+\frac{8-3\int_0^x f^2(t)dt}{x-2}=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (2, 3).

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 194.

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 188.

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 259.

Α4. α) Λάθος, **β)** Σωστό, **γ)** Λάθος, **δ)** Σωστό, **ε)** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω z=x+yi, x,y∈R.

Έχουμε |z-4|=2|z-1|⇔|z-4|^2 =4|z-1|^2⇔(z-4)$\left(\bar{z}-4\right)=4\left(z-1\right)\left(\bar{z}-1\right)\Leftrightarrow$

$z\bar{z}-4z-4\bar{z}+16=4z\bar{z}-4z-4\bar{z}+4\Leftrightarrow$

$3z\bar{z}=12\Leftrightarrow z\bar{z}=4\Leftrightarrow |z|^2=4\Leftrightarrow |z|=2$.

Άρα ο γ.τ. είναι κύκλος με κέντρο Ο(0, 0) και ακτίνα ρ=2.

Β2. α) $w=\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}$

Έχουμε $|z_1|=2\Leftrightarrow \bar{z}_1=\frac{4}{z_1}$ και $|z_2|=2\Leftrightarrow \bar{z}_2=\frac{4}{z_2}$

Είναι $\overline{w}=\frac{2\bar{z}_1}{\bar{z}_2}+\frac{2\bar{z}_2}{\bar{z}_1}=2\frac{\frac{4}{z_1}}{\frac{4}{z_2}}+2\frac{\frac{4}{z_2}}{\frac{4}{z_1}}=$

$2\frac{z_2}{z_1}+2\frac{z_1}{z_2}=w$. Άρα w∈R

β) Έχουμε $w=\frac{2\cdot z_1}{z_2}+\frac{2\cdot z_2}{z_1}$, οπότε $|w|=\left|\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}\right|\le 2\frac{|z_1|}{|z_2|}+2\frac{|z_2|}{|z_1|}=$

$=2\cdot\frac{2}{2}+2\cdot\frac{2}{2}=4\Leftrightarrow |w|\le 4\Leftrightarrow -4\le w\le 4$.

Β3. $w=-4\Leftrightarrow \frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}=-4$

$2z_1^2+2z_2^2=-4z_1z_2\Leftrightarrow z_1^2+z_2^2+2z_1z_2=0\Leftrightarrow (z_1+z_2)^2=0\Leftrightarrow$

$z_1+z_2=0\Leftrightarrow \boxed{z_1=-z_2}$.

- $(A\Gamma)=|z_3-z_1|=|2iz_1-z_1|=|-1+2i|\cdot|z_1|=2\sqrt{5}$
- $(B\Gamma)=|z_3-z_2|=|2iz_1-z_2|=|1+2i||z_1|=2\sqrt{5}$

Επειδή (ΑΓ)=(ΒΓ) τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο R ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Για κάθε $x\in R$ έχουμε

$$f'(x)=\left(\frac{e^x}{x^2+1}\right)'=\frac{e^x\cdot(x^2+1)-e^x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=$$

$\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}>0$ για κάθε $x\in R-\{1\}$ και αφού η f είναι συνεχής στο x=1, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $f(IR)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\frac{1}{x^2+1}\right)=0$ αφού

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x_2+1}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{\text{D.L.H.}}{=}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x^2+1)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{\text{D.L.H}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$

Άρα $f(IR)=(0,+\infty)$

Γ2. Για κάθε $x\in R$ έχουμε:

$$f\left(e^{3-x}\cdot(x^2+1)\right)=\frac{e^2}{5}\Leftrightarrow$$

$$f\left(e^{3-x}\cdot(x^2+1)\right)=f(2)\underset{f\uparrow R}{\overset{f1-1}{\Leftrightarrow}}$$

$$e^{3-x}\cdot(x_2+1)=2\Leftrightarrow$$

$$\frac{e^3\cdot(x^2+1)}{e^x}=2\Leftrightarrow\frac{e^x}{x^2+1}=\frac{e^3}{2}\Leftrightarrow$$

$f(x)=\frac{e^3}{2}$ (1).

Επειδή $\frac{e^3}{2}\in f(IR)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR, τότε η εξίσωση (1) έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.

Γ3. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο R, τότε $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$.

Έχουμε $\int_{2x}^{4x} f(t)dt = F(4x) - F(2x)$ (1).

Η F είναι συνεχής στο [2x, 4x] και παραγωγίσιμη στο (2x, 4x) με x>0, οπότε σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (2x, 4x)$ τέτοιο ώστε:

$$F'(\xi) = \frac{F(4x) - F(2x)}{4x - 2x} = \frac{F(4x) - F(2x)}{2x}.$$

Οπότε F(4x)-F(2x)=2xf(ξ) (2).

Από (1), (2) έχουμε:

$$\int_{2x}^{4x} f(t)dt = 2xf(\xi).$$

Επειδή 0<2x<ξ<4x και η f είναι γνησίως αύξουσα τότε f(ξ)<f(4x) ή 2xf(ξ)<2xf(4x).

Άρα $\int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2xf(4x)$

Γ4. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε $g(x) = \frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x} = \frac{\int_{1}^{4x} f(t)dt - \int_{1}^{2x} f(t)dt}{x}$

- Αφού η f είναι συνεχής στο (0, +∞) τότε η συνάρτηση $\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞).
- Η $g_1(x)$ $\int_1^{4x} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $\int_1^x f(t)dt$ και 4x.
- Η $g_2(x) = \int_1^{2x} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $\int_1^x f(t)dt$ και 2x.

Άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε η g είναι και συνεχής στο (0, +∞).

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε

$$g'(x) = \left(\frac{\int_1^{4x} f(t)dt - \int_1^{2x} f(t)dt}{x} \right)' =$$

$$\frac{\left(4f(4x) - 2f(2x)\right)x - \left(\int_1^{4x} f(t)dt - \int_1^{2x} f(t)dt\right)}{x^2} =$$

$$\frac{2x\left[f(4x) - f(2x)\right] + \left[2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t)dt\right]}{x^2}$$

• Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ από το Γ3 ισχύει $2xf\left(4x\right)-\int_{2x}^{4x}f\left(t\right)dt>0$

• Επειδή $0<2x<4x$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε

$f\left(2x\right)<f\left(4x\right)\Leftrightarrow$

$f\left(4x\right)-f\left(2x\right)>0\Leftrightarrow$

$2x\left[f\left(4x\right)-f\left(2x\right)\right]>0$

Άρα $g'\left(x\right)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to0^+}g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_{2x}^{4x}f\left(t\right)dt}{x}\underset{\text{D.L.H}}{=}\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\left(\int_{2x}^{4x}f\left(t\right)dt\right)'}{\left(x\right)'}=\lim\limits_{x\to0^+}\left[4f\left(4x\right)-2f\left(2x\right)\right]=2=g(0)$

αφού f συνεχής στο $x_0=0$ τότε

$\lim\limits_{x\to0}f(4x)\overset{4x=u}{=}\lim\limits_{u\to0}f(u)=f(0)=1$ και $\lim\limits_{x\to0}f(2x)\overset{2x=u}{=}\lim\limits_{u\to0}f(u)=f(0)=1$

Επομένως η g είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Επειδή η g είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ με $g'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ τότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x\in IR$ έχουμε:

$f'\left(x\right)\left[e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right]=2\Leftrightarrow$

$f'\left(x\right)e^{f(x)}+f'\left(x\right)e^{-f(x)}=2\Leftrightarrow$

$\left(e^{f(x)}-e^{-f(x)}\right)'=(2x)'.$

Άρα υπάρχει σταθερά $c\in IR$ ώστε $e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x+c$, $x\in IR$ (1)

Για $x=0$ από (1) προκύπτει:

$e^{f(0)}-e^{-f(0)}=2\cdot0+c\Leftrightarrow c=0.$

Άρα $e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x,\ x\in R$.

Για κάθε $x\in R$ έχουμε:

$e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x\Leftrightarrow$

$e^{f(x)}-\dfrac{1}{e^{f(x)}}=2x\Leftrightarrow$

$e^{2f(x)}-2xe^{f(x)}-1=0\Leftrightarrow$

$e^{2f(x)}-2xe^{f(x)}+x^2=x^2+1\Leftrightarrow$

$\left(e^{f(x)}-x\right)^2=x^2+1$

Θέτουμε $\varphi(x)=e^{f(x)}-x$, $x\in R$ οπότε $\varphi^2(x)=x^2+1,\ x\in R$.

Επειδή η φ είναι συνεχής στο IR και φ(x)≠0 για κάθε x∈IR, τότε η φ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R

Αφού $\varphi(0)=e^{f(0)}=e^0=1>0$

Τότε φ(x)>0 για κάθε x∈IR. Άρα $\varphi(x)=\sqrt{x^2+1},\ x\in IR\Leftrightarrow$

$e^{f(x)}-x=\sqrt{x^2+1}$, $x\in IR\Leftrightarrow$

$e^{f(x)}=x+\sqrt{x^2+1}$, $x\in IR$.

Επειδή για κάθε x∈IR ισχύει $x+\sqrt{x^2+1}>x+\sqrt{x^2}=x+|x|\geq 0$.

Τότε $f(x)=\ell n(x+\sqrt{x^2+1})$, $x\in IR$.

Δ2. α) Η f είναι συνεχής στο IR αφού η f παραγωγίσιμη στο IR.

Για κάθε x∈IR έχουμε

$$f'(x)=\left[\ell n\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x\right)=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\frac{-\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1}=$$

$$=\frac{-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{-x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$$

Έχουμε $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$

$f'(x)>0\Leftrightarrow x<0$

$f'(x)<0\Leftrightarrow x>0$

- Η f είναι κυρτή στο (-∞, 0] αφού η f είναι συνεχής στο (-∞, 0] με f΄(x)>0 στο (-∞, 0) με f΄(x)>0 στο (-∞, 0).
- Η f είναι κοίλη στο [0, +∞) αφού η f είναι συνεχής στο [0, +∞) με f΄(x)<0 στο (0, +∞).

Το σημείο (0, 0) είναι σημείο καμπής της C_f αφού η f΄΄ μηδενίζεται στο $x_0=0$ και εκατέρωθεν αυτό αλλάζει πρόσημο.

β) Η εφαπτομένη ε της Cf στη σημείο της O(0, 0) έχει εξίσωση

ε: y-f(0)=f΄(0)(x-0)⇔ y=x

Επειδή η f είναι κοίλη στο [0, +∞) τότε $f(x)\leq x$ για κάθε $x\in[0, +\infty)$ (η ισότητα ισχύει μόνο για x=0).

Άρα $E(\Omega)=\int_0^1\left[x-f(x)\right]dx=$

$$\int_0^1 xdx-\int_0^1 f(x)dx=$$

$$\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\int_0^1 (x)'\ell n(x+\sqrt{x^2+1})dx=$$

$$\frac{1}{2}-\left[x\ell n\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1+\int_0^1 x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=$$

$$\frac{1}{2}-\ell n\left(\sqrt{2}+1\right)+\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1=$$

$$\frac{1}{2}-\ell n\left(\sqrt{2}+1\right)+\sqrt{2}-1=$$

$$\sqrt{2}-\frac{1}{2}-\ell n\left(\sqrt{2}+1\right)\ \tau./\mu.$$

Δ3.

• Επειδή η f είναι συνεχής στο 0 τότε $\lim\limits_{x\to0^+} f^2(x)=f^2(0)=0$

• Αφού η συνάρτηση $f^2(t)$ είναι συνεχής στο IR, τότε η $h(x)=\int_0^x f^2(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο IR και άρα είναι συνεχής στο IR.

Επειδή η h συνεχής στο 0 τότε $\lim\limits_{x\to0^+}\int_0^x f^2(t)dt=\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=h(0)=\int_0^0 f^2(t)dt=0$

• Είναι f(x)>0 για κάθε $x\in(0, +\infty)$. Οπότε |f(x)|=f(x) για κάθε $x\in(0, +\infty)$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\ell n\left|f(x)\right|\right]=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{f(x)}\cdot f(x)\ell nf(x)\right]=0$

<u>αφού</u> • $\lim\limits_{x\to0}e^{\int_0^x f^2(t)dt}=\lim\limits_{x\to0}e^{h(x)}\overset{h(x)=u}{=}\lim\limits_{u\to0}e^u=e^0=1$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt-1}}{f(x)}\underset{\text{D.L.H}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\left(e^{\int_o^x f^2(t)dt-1}\right)'}{f'(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\left[e^{\int_o^x f^2(t)dt}\cdot f^2(x)\right]}{f'(x)}=\frac{1\cdot0}{1}=0,\ \text{αφού}\ \lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=1$$

• $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[f(x)\ell nf(x)\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ell nf(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}\overset{\text{D.L.H}}{=}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(\ell nf(x)\right)'}{\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{f'(x)}{f(x)}}{-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-f(x)\right)=0$

Αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ell nf(x)\right)\overset{f(x)=u}{=}\lim\limits_{u\to 0^+}\ell nu=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ (Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$ και f(x)>0 για x>0).

Δ4. Για κάθε $x\in(2,3)$ έχουμε

$$\frac{1-3\int_0^{x-2}f\left(t^2\right)dt}{x-3}+\frac{8-3\int_0^{x}f^2(t)dt}{x-2}=0\Leftrightarrow$$

$$(x-2)\left[1-3\int_0^{x-2}f\left(t^2\right)dt\right]+(x-3)\left[8-3\int_0^{x}f^2(t)dt\right]=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=(x-2)\left[1-3\int_0^{x-2}f\left(t^2\right)dt+(x-3)\left[8-3\int_0^{x}f^2(t)dt\right]\right],x\in[2,3]$$

• Οι συναρτήσει x-2 και x-3 είναι συνεχείς στο [2, 3] ως πολυωνυμικές

• Οι συναρτήσεις f(t) και t^2 είναι συνεχείς στο [2, 3] ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Επομένως η συνάρτηση $\int_0^{x}f\left(t^2\right)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο [2, 3] και επειδή η συνάρτηση x-2 είναι παραγωγίσιμη στο [2, 3] τότε η συνάρτηση $\int_0^{x-2}f\left(t^2\right)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο [2, 3] ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και άρα είναι συνεχής στο [2, 3].

• Η συνάρτηση $f^2(t)$ είναι συνεχής στο [2, 3] οπότε η συνάρτηση $\int_0^{x}f^2(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο [2, 3] και άρα είναι συνεχής στο [2, 3]. Επομένως η g είναι συνεχής στο [2, 3] ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων

$g(2)=\int_0^{2}f^2(t)dt-8$

$g(3)=1-3\int_0^{1}f(t^2)dt$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο IR, αφού $f'(x)>0$, $x\in$IR.

Άρα $f(x)\geq f(0)$, $x\in[0,+\infty)$. Οπότε $f(x)\geq 0$, $x\in[0,+\infty)$

Ισχύει $0\leq f(x)\leq x$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$ (Η ισότητα ισχύει μόνο για x=0)

• Η συνάρτηση $K(t)=t^2-f^2(t)$, $t\in[0, 2]$ είναι συνεχής στο $[0, 2]$ με $K(t)\geq 0$ για κάθε $t\in[0, 2]$ και η K δεν είναι παντού μηδέν στο $[0, 2]$

Άρα $\int_0^2 K(t)dt > 0 \Leftrightarrow$

$$\int_0^2 \left(t^2 - f^2(t)\right)dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 t^2 dt - \int_0^2 f^2(t)dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 - \int_0^2 f^2(t)dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{8}{3} - \int_0^2 f^2(t)dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$3\int_0^2 f^2(t)dt - 8 < 0 \Leftrightarrow g(2) < 0$$

• Η συνάρτηση $H(t)=t^2-f(t^2)$ $t\in[0, 1]$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ με $H(t)\geq 0$, για κάθε $t\in[0, 1]$ και η H δεν είναι παντού μηδέν στο $[0, 1]$, άρα

$$\int_0^1 H(t)dt > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[t^2 - f(t^2)\right]dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 t^2 dt - \int_0^1 f(t^2)dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 - \int_0^1 f(t^2)dt > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} - \int_0^1 f(t^2)dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 3\int_0^1 f(t^2)dt > 0.$$

Επομένως $g(2)\cdot g(3) < 0$, οπότε σύμφωνα με το g(3)>0 θεώρημα Bolzano η εξίσωση g(x)=0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (2, 3)

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

www.floropoulos.gr

ΚΟΥΣΗΣ Π. - ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Γ. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Β. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α. – ΦΩΤΟΥ Φ.