ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 8

Α2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

Μονάδες 3

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστη, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε $z \in C$ ισχύει $z - \bar{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)$

(μονάδες 2)

β) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

(μονάδες 2)

γ) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

(μονάδες 2)

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και α, β, γ ∈ Δ, τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

(μονάδες 2)

ε) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ.

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση

$$2|z|^2+\left(z+\bar{z}\right)i-4-2i=0\,,\ z\in C$$

Β1. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 9

Β2. Αν $z_1=1+i$ και $z_2=1-i$ είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$w=3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39}$$

είναι ίσος με -3i

Μονάδες 8

Β3. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών u για τους οποίους ισχύει

$$|u+w|=|4z_1-z_2-i|$$

όπου w, z_1, z_2 οι μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος Β2.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=x-\ln(e^x+1)$, $x\in R$

Γ1. Να μελετήσετε την h ως προς την κυρτότητα.

Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την ανίσωση

$$e^{h(2h'(x))}<\frac{e}{e+1}\,,\ x\in R$$

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$, καθώς και την πλάγια ασύμπτωτής της στο $-\infty$.

Μονάδες 6

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=e^x(h(x)+\ln 2)$, $x\in R$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της φ(x), στον άξονα x΄x και την ευθεία x=1

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & \text{αν } x\neq 0\\ 1, & \text{αν } x=0\end{cases}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$ και, στη συνέχεια, ότι είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 7

Δ2. Δίνεται επιπλέον ότι η f είναι κυρτή.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\int_1^{2f'(x)} f(u)du=0$$

έχει ακριβώς μία λύση, η οποία είναι x=0

(μονάδες 7)

β) Ένα υλικό σημείο Μ ξεκινά τη χρονική στιγμή t=0 από ένα σημείο $A(x_0,f(x_0))$ με $x_0<0$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης y=f(x), $x\geq x_0$ με x=x(t), y=y(t), $t\geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x(t) του σημείου Μ είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του y(t), αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\geq 0$.

(μονάδες 4)

Μονάδες 11

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$g(x)=(xf(x)+1-e)^2(x-2)^2$, $x\in(0,+\infty)$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελίδα 251

Α2. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελίδα 273

Α3. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελίδα 150

Α4.

α) Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό **ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $z=x+yi$ με $x,y\in R$

Έχουμε:

$2(x^2+y^2)+2xi-4-2i=0\Leftrightarrow$

$(2x^2+2y^2-4)+(2x-2)i=0 \Leftrightarrow$

$2x^2+2y^2-4=0$ και $2x-2=0 \Leftrightarrow x=1$ και $y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm 1$

Άρα $z_1=1+i$ και $z_2=1-i$

Β2. $w=3\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{39}=3\left(\dfrac{2i}{2}\right)^{39}=3i^{39}=3(i^4)^9 i^3=-3i$

Β3. $|u+w|=|4z_1-z_2-i| \Leftrightarrow |u-3i|=|3+4i| \Leftrightarrow |\mathrm{u}-3\mathrm{i}|=5$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του u είναι κύκλος με κέντρο Κ(0,3) και ακτίνα ρ=5

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η h είναι συνεχής στο R ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων

$$h'(x)=1-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}, x\in R$$

$$h''(x)=-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}<0, x\in R$$

Άρα η h είναι κοίλη στο R

Γ2. Αφού h΄(x) > 0 , $x\in R$ τότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο R .

Για κάθε $x\in R$ έχουμε:

$$e^{h(2h'(x))}<\frac{e}{e+1}\Leftrightarrow \ln e^{h(2h'(x))}<\ln\frac{e}{e+1}\Leftrightarrow$$

$$h(2h'(x))<\ln e-\ln(e+1)\Leftrightarrow h(2h'(x))<1-\ln(e+1)\Leftrightarrow$$

$$h(2h'(x))<h(1)\Leftrightarrow 2h'(x)<1\Leftrightarrow \frac{2}{e^x+1}<1\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow e^x>e^0\Leftrightarrow x>0$$

Γ3. $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln e^x-\ln(e^x+1))=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{e^x}{e^x+1}=\lim\limits_{u\to 1}\ln u=\ln 1=0$

όπου $u=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{e^x}}=1$

Άρα η C_h έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία y =0

$\lim\limits_{x\to-\infty}\big(h(x)-x\big)=\lim\limits_{x\to-\infty}\big(-\ln(e^x+1)\big)=\lim\limits_{y\to 1}(-\ln y)=-\ln 1=0$, όπου

$y=e^x+1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+1)=1$

Άρα η C_h έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία y = x

Γ4. Για κάθε $x \in R$ έχουμε

$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(h(x) + \ln 2) = 0 \Leftrightarrow h(x) + \ln 2 = 0 \Leftrightarrow h(x) = -\ln 2 \Leftrightarrow$

$h(x) = h(0) \overset{h \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} x = 0$

Η φ είναι συνεχής στο [0,1]

Για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε $h(x) \geq h(0) \Leftrightarrow h(x) \geq -\ln 2 \Leftrightarrow h(x) + \ln 2 \geq 0$ και $e^x \geq 1$, οπότε $e^x(h(x) + \ln 2) \geq 0$ και άρα $\varphi(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$

Επομένως

$$E = \int_0^1 \varphi(x)dx = \int_0^1 e^x \left[x - \ln(e^x + 1) + \ln 2 \right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left(xe^x - e^x \ln(e^x + 1) + e^x \ln 2 \right) dx =$$

$$\int_0^1 x(e^x)'dx - \int_0^1 (e^x + 1)' \ln(e^x + 1)dx + \int_0^1 e^x \ln 2 dx =$$

$$[xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx - [(e^x + 1)\ln(e^x + 1)]_0^1 + \int_0^1 e^x dx + \ln 2[e^x]_0^1 =$$

$$[xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1 - [(e^x + 1)\ln(e^x + 1)]_0^1 + [e^x]_0^1 + \ln 2[e^x]_0^1 =$$

$$e - (e+1)\ln(e+1) + 2\ln 2 + (e-1)\ln 2 = e + (e+1)\ln\frac{2}{e+1} \tau\mu$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x}{1} = e^0 = 1 = f(0)$,

οπότε η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$

Για κάθε $x \in R^*$ έχουμε $f'(x) = \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = xe^x - e^x + 1, x \in R$

Η h είναι συνεχής στο R

Για κάθε $x \in R$ έχουμε $h'(x) = xe^x$

Για x < 0 είναι $h'(x) < 0$, οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και άρα για x < 0 είναι $h(x) > h(0) = 0$.

Για x > 0 είναι $h'(x) > 0$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και άρα για x > 0 είναι $h(x) > h(0) = 0$.

Επομένως $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in R^*$ και αφού η f συνεχής στο 0, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

Δ2. α) Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\dfrac{e^x-1}{x}-1}{x} = \dfrac{e^x-x-1}{x^2}$

Επομένως

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-x-1)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \frac{1}{2}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = \dfrac{1}{2}$

Θεωρούμε την συνάρτηση $G(x) = \int_1^{2f'(x)} f(u)du, x \in R$

Έχουμε G(0) = $\int_1^{2f'(0)} f(u)du = \int_1^1 f(u)du = 0$, οπότε η x = 0 είναι λύση της εξίσωσης G(x) = 0

Επειδή η f είναι κυρτή στο R τότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο R

- ✓ Για x > 0 είναι $e^x > e^0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$, οπότε $f(x) = \dfrac{e^x-1}{x} > 0$
- ✓ Για x < 0 είναι $e^x < e^0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0$, οπότε $f(x) = \dfrac{e^x-1}{x} > 0$
- ✓ Για x = 0 είναι f(0) = 1 > 0

Επομένως f(x) > 0 για κάθε $x \in R$

- ✓ Για x > 0 είναι $f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2f'(x) > 1$

  Άρα $\int_1^{2f'(x)} f(u)du > 0 \Leftrightarrow G(x) > 0$
- ✓ Για x < 0 είναι $f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x) < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2f'(x) < 1$

  Άρα $\int_{2f'(x)}^1 f(u)du > 0 \Leftrightarrow -\int_1^{2f'(x)} f(u)du > 0 \Leftrightarrow G(x) < 0$

Επομένως η x =0 είναι μοναδική λύση της εξίσωσης G(x) = 0

β) Είναι $y(t) = f(x(t))$, οπότε $y'(t) = f'(x(t))x'(t)$, $t \geq 0$

Αν t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία είναι $x'(t_0) = 2y'(t_0)$ τότε έχουμε

$x'(t_0) = 2f'(x(t_0))x'(t_0) \overset{x'(t_0)>0}{\Leftrightarrow} 2f'(x(t_0)) = 1 \Leftrightarrow$

$f'(x(t_0)) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(x(t_0)) = f'(0) \overset{f'1-1}{\Leftrightarrow} x(t_0) = 0$, οπότε

$y(t_0) = f(x(t_0)) = f(0) = 1$

Άρα το $M_0(0,1)$ είναι το ζητούμενο σημείο της καμπύλης

Δ3. Έχουμε $g(x) = (xe^x + 1 - e)^2(x-2)^2 = (e^x - e)^2(x-2)^2, x \in (0,+\infty)$

$g'(x) = 2(x-2)(e^x - e)(xe^x - e^x - e), x \in (0,+\infty)$

Είναι $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή x = 2 ή $xe^x - e^x - e = 0$

Θεωρούμε την συνάρτηση $K(x) = xe^x - e^x - e, x \in (0,+\infty)$

Επειδή $K'(x) = xe^x > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$, η Κ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε η εξίσωση K(x) = 0 έχει το πολύ μια ρίζα στο $(0,+\infty)$

Η Κ συνεχής στο [1,2] και ισχύει $K(1)K(2) = -e(e^2 - e) < 0$

Άρα σύμφωνα με το ΘΒ υπάρχει $\rho \in (1,2)$ ώστε K(ρ)=0, το οποίο μαναδικό.

Για 0 < x < ρ είναι K(x) < K(ρ) = 0 και

για x > ρ είναι K(x) > K(ρ) = 0

x	0		1		ρ		2		$+\infty$
x – 2	–		–		–		0	+	
$e^x - e$	–	0	+		+			+	
K(x)	–		–	0	+			+	
g΄(x)	–	0	+	0	–	0		+	
g(x)	Γν.φθίνουσα		Γν. αύξουσα		Γν.φθίνουσα			Γν. αύξουσα	
			τ.ελάχιστο		τ. μέγιστο		τ. ελάχιστο		

Άρα η g έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ
«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΚΟΥΣΗΣ Π. – ΣΙΦΝΑΙΟΣ Δ. – ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Ι. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Ε. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α. – ΦΩΤΟΥ Φ.